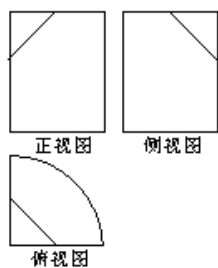
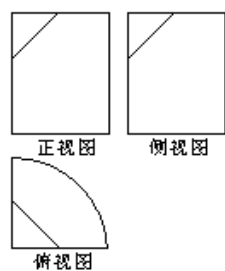


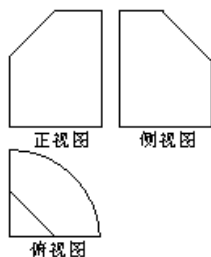
3. 右图是某几何体的直观图，其三视图正确的是（ ）



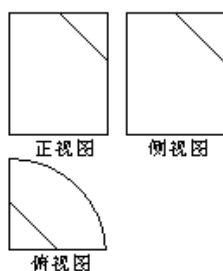
A.



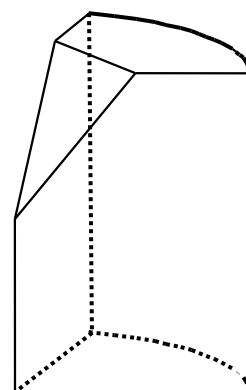
C.



B.



D.



4. 右图所示的程序框图输出的结果为

()

- A. $\frac{19}{20}$
 B. $\frac{18}{19}$
 C. $\frac{21}{22}$
 D. $\frac{20}{21}$

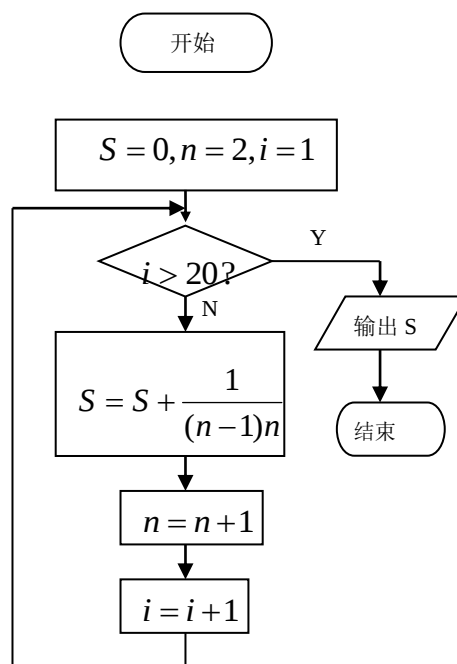
5. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足以下两个条件:

(1) 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) + f(-x) = 0$ 成立;

(2) 当 $x < 0$ 时, $(x^2 + 2x)f'(x) \geq 0$

则下列不等关系中正确的是 ()

- A. $f(-1) \leq f(0)$
 B. $f(-2) \leq f(-3)$
 C. $f(2) \geq f(0)$
 D. $f(1) \geq f(2)$



第 4 题

6. 如图, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 中, F 为右焦点, A 为左顶点, 点

B 的坐标为 $B(0, b)$, 若 $AB \perp BF$, 则此双曲线的离心

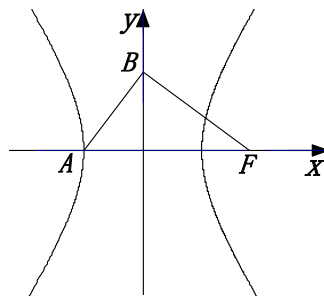
率为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$



第 6 题

7. 已知 $\vec{a} = (1, t)$, $\vec{b} = (3t, 2)$, 那么 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$ 的取值

范围是 ()

A. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$; B. $[2\sqrt{2}, +\infty)$; C. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$; D. $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

8. 已知实数 u, v , 定义运算 $u * v = (u-1)v$,

设 $u = \cos \theta + \sin \theta$, $v = \cos \theta - \sin \theta - 1$, 则当 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ 时, $u * v$ 是的值域为

()

A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

B. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

C. $[0, 4]$

D. $\left[1-\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right]$

9. 定义在 R 上函数 $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{3\pi}{2}x), & x \leq 0, \\ f(x-1) - f(x-2), & x > 0. \end{cases}$ 则 $f(2010)$ 的值为

()

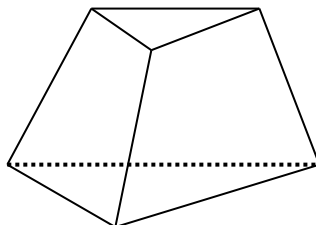
A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

10. 从足够多的四种颜色的灯泡中任选六个安置在如右图的 6 个顶点处, 则相邻顶点处灯泡颜色不同的概率为 ()



A. $\frac{228}{4^6}$

B. $\frac{240}{4^6}$

C. $\frac{264}{4^6}$

D. $\frac{288}{4^6}$

第II卷（满分100分）

二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，共25分）

11. 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中 x 的指数是整数的项共有_____项.

12. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n = 3S_n + (1 - n^2)$. 则 S_5 为_____.

13. 已知 $\begin{cases} x+2y-6 \geq 0 \\ 2x-y-8 \leq 0 \\ y \leq 6 \end{cases}$, 则 $z = ax - y$ ($a > 2$) 的取值范围是_____.

14. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 2\angle B$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是_____.

15. 给出以下几个命题:

① 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2, & x < -1, \\ 2, & x \geq -1. \end{cases}$ 则 $f(x) = x$ 有三个根;

② $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0 \leq \sin x_0$;

③ 过空间任一点, 有且只有一个平面与两异面直线同时平行;

④ 两条直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 与直线 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 平行的充要条件是 $\begin{cases} A_1B_2 = A_2B_1, \\ B_1C_2 \neq B_2C_1. \end{cases}$

⑤ $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-1}\right)}$ 的定义域是 $[2, +\infty)$.

则正确的命题有_____ (填序号).

三、解答题（本大题共6小题，共75分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16. (本小题满分12分)

已知 $\vec{a} = (\sin(\omega x + \phi), 2)$, $\vec{b} = (1, \cos(\omega x + \phi))$ ($\omega > 0, 0 < \phi < \frac{\pi}{4}$), 函数 $f(x) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) - 2$, $y = f(x)$ 的图象的相邻两对称轴之间距离为 2, 且过点 $A(1, \frac{3}{2})$.

- (1) 求 $f(x)$ 的表达式;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

17. (本小题满分 12 分)

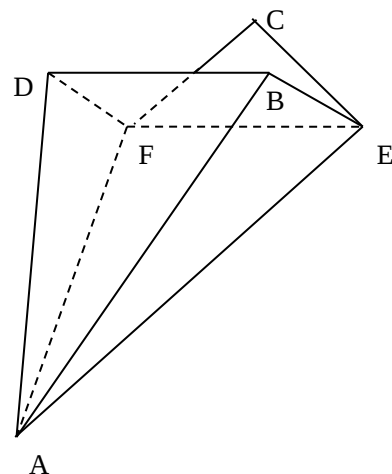
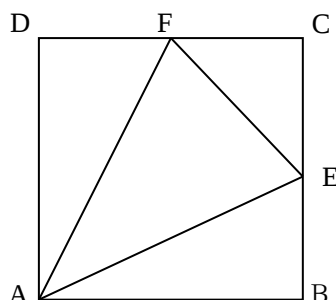
上海世博会于 2010 年 5 月 1 日正式开幕, 按规定个人参观各场馆需预约, 即进入园区后持门票当天预约, 且一张门票每天最多预约六个场馆. 考虑到实际情况 (排队等待时间等), 张华决定参观甲、乙、丙、丁四个场馆. 假设甲、乙、丙、丁四个场馆预约成功的概率分别是 $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}$, 且它们相互独立互不影响.

- (1) 求张华能成功预约甲、乙、丙、丁中两个场馆的概率;
- (2) 用 ξ 表示能成功预约场馆的个数, 求随机变量 ξ 的分布列和数学期望.

18. (本小题满分 12 分)

已知四边形 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形, E, F 分别为 BC, CD 的中点, 沿 AE, AF, EF 将 $\triangle ABE, \triangle ADF, \triangle CEF$ 向同侧折叠且与平面 AEF 成直二面角, 连接 BD .

- (1) 求证 $BD \perp AC$;
- (2) 求平面 CEF 与平面 ABE 所成锐角的余弦值.



19. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x - a(x-1), x \in \mathbb{R}$.

(1) 若实数 $a > 0$, 求函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的极值;

(2) 记函数 $g(x) = f(2x)$, 设函数 $y = g(x)$ 的图象 C 与 y 轴交于 P 点, 曲线 C 在 P 点处的切线与两坐标轴所围成的图形的面积为 $S(a)$, 求当 $a > 1$ 时 $S(a)$ 的最小值.

20. (本小题满分 13 分)

已知曲线 $D: \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos \theta \\ y = 2\sqrt{2} \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$ 交 x 轴于 A, B 两点, 曲线 C 是以 AB

为长轴, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 设 M 是直线 $x = -4$ 上的任一点, 以 OM 为直径的圆交曲线 D 于 P, Q 两点 (O 为坐标原点). 若直线 PQ 与椭圆 C 交于 G, H 两点, 交 x 轴于点 E , 且 $\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{HE}$. 试求此时弦 PQ 的长.

21. (本小题满分 13 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = a$ ($a > 2$) 且 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)} (n \in \mathbb{N}^*)$

(1) 求证 $a_n > 2 (n \in \mathbb{N}^*)$; (2) 求证 $a_{n+1} < a_n (n \in \mathbb{N}^*)$;

(3) 若存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $a_k \geq 3$, 求证: $k < \frac{\ln \frac{3}{a}}{\ln \frac{3}{4}} + 1$.

合肥市 2010 年高三第四次教学质量检测

数学试题参考答案及评分标准（理）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	D	D	D	C	A	B	C

二、填空题

11. 3 12. $-\frac{11}{32}$ 13. $[-6a-6, 7a-6]$ 14. (1,2)

15. ②⑤

三、解答题

16. 解：（1） $f(x) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 - 2 = 1 - \cos(2\omega x + 2\phi)$. ……………2 分

由题意知 $T = \frac{2\pi}{|2\omega|} = 4, \therefore \omega = \frac{\pi}{4}$, ……………4 分

又图象过 A, 则 $\frac{3}{2} = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} \times 1 + 2\phi)$, $\sin 2\phi = \frac{1}{2}$,

又 $0 < \phi < \frac{\pi}{4}, \therefore \phi = \frac{\pi}{12}, \therefore f(x) = 1 - \cos(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6})$ ……………6 分

（2）由 $2k\pi \leq \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi$, 得

$4k - \frac{1}{3} \leq x \leq 4k + \frac{5}{3} (k \in \mathbb{Z}), \therefore$ 递增区间为 $\left[4k - \frac{1}{3}, 4k + \frac{5}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$. ……12 分

17. 解：记事件 $A =$ “成功预约甲场馆”， $B =$ “成功预约乙场馆”， $C =$ “成功预约丙场馆”， $D =$ “成功预约丁场馆”，则由已知事件 A, B, C, D 相互独立，且它们的对立事件 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ 也相互独立. ……………2 分

（1）张华能成功预约甲、乙、丙、丁中两个场馆的概率为

$P = P(A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}) + P(A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D}) + P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D) + P(\bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D}) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D)$

$$+P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times (\frac{2}{5})^2 + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{234}{625} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) } P(\xi = 2) = \frac{234}{625},$$

同 (1) 可得

$$P(\xi = 0) = P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}) = \frac{3}{5} \times (\frac{2}{5})^3 = \frac{24}{625},$$

$$P(\xi = 3) = P(A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D}) + P(A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D) + P(A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D) + P(\bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D)$$

$$= \frac{2}{5} \times (\frac{3}{5})^2 \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times (\frac{3}{5})^2 + (\frac{3}{5})^4 = \frac{189}{625}$$

$$P(\xi = 4) = P(A \cdot B \cdot C \cdot D) = \frac{2}{5} \times (\frac{3}{5})^3 = \frac{54}{625}$$

$$P(\xi = 1) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 2) - P(\xi = 3) - P(\xi = 4) = \frac{124}{625},$$

$\therefore$ 分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{24}{625}$	$\frac{124}{625}$	$\frac{234}{625}$	$\frac{189}{625}$	$\frac{54}{625}$

.....

..... 10 分

$$\therefore E\xi = 0 \times \frac{24}{625} + 1 \times \frac{124}{625} + 2 \times \frac{234}{625} + 3 \times \frac{189}{625} + 4 \times \frac{54}{625} = \frac{11}{5} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 方法一: 以 EF 的中点 O 为原

点, OA 为 x 轴, OE 为 y 轴, OC 为 z 轴建立直

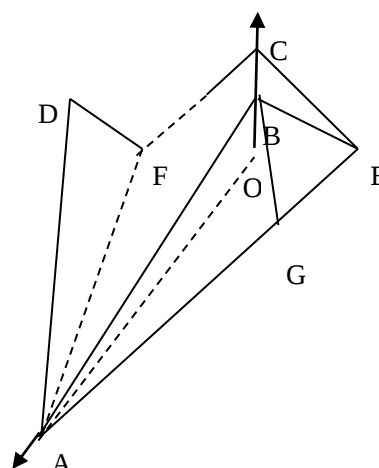
角坐标系, 则 C (0, 0, 1), A (3, 0, 0),

E (0, 1, 0), 解正方形可得

$$B(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{10}}{5}), D(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{10}}{5})$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = (-3, 0, 1), \overrightarrow{BD} = (0, -\frac{8}{5}, 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \therefore \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$$



..... 6 分

(2) $\because \overrightarrow{OA} \perp \text{面} CEF, \therefore \text{面} CEF \text{的法向量为} \overrightarrow{OA} = (3, 0, 0)$

设面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{EA} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{EB} \end{cases}, \text{得} \begin{cases} (x, y, z) \cdot (3, -1, 0) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2\sqrt{10}}{5}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

令 $x=1$, 得一个法向量为 $\vec{n} = (1, 3, 0)$, 设锐二面角为 θ

$$\text{则} \cos \theta = \frac{\left| \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} \right|}{\left| \overrightarrow{OA} \right| \cdot \left| \vec{n} \right|} = \frac{\left| 3 \right|}{3 \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

方法二 (1) 过 D 作 $DH \perp AF$ 于 H, 过 B 作 $BG \perp AE$ 于 G.

$\because \triangle ABE \cong \triangle ADF, \therefore BG = DH$

又面 $ABG \perp \text{面} AEF, \therefore DH \perp \text{面} AEF, \therefore BG \parallel DH$

故四边形 BDHG 为平行四边形, $\therefore BD \parallel GH$

取 EF 中点为 O, 连 CO、AO

则 $CO \perp EF, AO \perp EF, \therefore EF \perp \text{面} ACO$

又 $GH \parallel EF, \therefore BD \parallel EF, \therefore BD \perp \text{面} ACO,$

$\therefore BD \perp AC \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) $\because \text{面} ABE \perp \text{面} AEF, \text{面} CEF \perp \text{面} AEF$

$\therefore \text{面} ABE$ 与 $\text{面} CEF$ 的交线必与 $\text{面} AEF$ 垂直,

故 $\angle AEF$ 为二面角平面角。

在 $\triangle AEF$ 中, $AE = \sqrt{10}, EF = 2,$

$$\therefore \cos \angle AEF = \frac{EF}{AE} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

故二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. 解: (1) 由 $f'(x) = e^x - a = 0$, 得 $x = \ln a$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

① 当 $a \in (0, 1]$ 时, $f'(x) = e^x - a > 1 - a \geq 0 (x > 0)$. 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 函数无极值. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

②当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $\ln a > 0$.

当 x 变化时 $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, \ln a)$	$\ln a$	$(\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单减	极小值	单增

由此可得, 函数有极小值且

$$f(x)_{\text{极小}} = f(\ln a) = a - a(\ln a - 1) = 2a - a \ln a. \dots\dots 6 \text{ 分}$$

($\frac{a+1}{2(a-1)}$)

$$g(x) = f(2x) = e^{2x} - a(2x-1), g(0) = 1+a \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

切线斜率为 $k = g'(0) = 2 - 2a$, 切线方程 $y - (1+a) = (2-2a)(x-0)$, 10 分

$$\text{由 } x=0, y=1+a, \text{ 由 } y=0, x = \frac{a+1}{2(a-1)}$$

$$\therefore S(a) = \frac{1}{2}(a+1) \frac{a+1}{2(a-1)} = \frac{a^2 + 2a + 1}{4(a-1)} = \frac{(a-1)^2 + 4a}{4(a-1)}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(a-1)^2 + 4(a-1) + 4}{a-1} = \frac{1}{4} [(a-1) + \frac{4}{a-1} + 4]$$

$$\geq \frac{1}{4} [2\sqrt{(a-1) \frac{4}{a-1}} + 4] = 2$$

当且仅当 $(a-1)^2 = 4$, 即 $a=3$ 时取等号.

$\therefore$ 当 $a=3$ 时, $S(a)$ 最小值为 2. $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

20. 解: (1) 圆方程由参数方程可化为 $x^2 + y^2 = 8$ 交 x 轴于 $A(-2\sqrt{2}, 0)$,

$B(2\sqrt{2}, 0)$

依题意, 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则 $a = 2\sqrt{2}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $c = 2$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 8 - 4 = 4$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 设直线 $x = -4$ 上任一点 $M(-4, t)$, 则以 OM 为直径的圆方程为

$$x(x+4) + y(y-t) = 0, \text{ 即 } x^2 + y^2 + 4x - ty = 0.$$

$$\text{又 } \odot O \text{ 方程为 } x^2 + y^2 = 8, \therefore \text{直线 } PQ \text{ 方程为 } 4x - ty = -8,$$

令 $y = 0$, 得 $x = -2$, $\therefore$ 点 E 的坐标为 $(-2, 0)$.

$$\text{由 } \begin{cases} 4x - ty = -8 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (t^2 + 32)y^2 - 16ty - 64 = 0 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{设 } G(x_1, y_1), H(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{16t}{t^2 + 32} \quad \textcircled{1}$$

$$y_1 \cdot y_2 = -\frac{64}{t^2 + 32} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{EG} = (x_1 + 2, y_1), \overrightarrow{HE} = (-2 - x_2, -y_2), \overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{HE}$$

$$\therefore y_1 = -3y_2 \quad \textcircled{3}$$

由 $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$ 解得 $t = \pm 4$

$$\therefore PQ \text{ 方程: } x + y = -2 \text{ 或 } x - y = -2$$

$$\therefore \text{圆心 } O \text{ 到 } x + y = -2 \text{ 或 } x - y = -2 \text{ 的距离 } d = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}|PQ| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore |PQ| = 2\sqrt{6} \text{ 即弦 } PQ \text{ 的长为 } 2\sqrt{6} \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

21. 证明: (1) (解法一) $\textcircled{1}$ 当 $n=1$ 时, $a_1 = a > 2$, 命题成立; $\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\textcircled{2}$ 设当 $n=k$ 时 ($k \geq 1$ 且 $n \in N^*$) 命题成立, 即 $a_k > 2$

$$\text{而 } n = k+1 \text{ 时, } a_{k+1} = \frac{a_k^2}{2(a_k - 1)} = \frac{1}{2}[(a_k - 1) + \frac{1}{a_k - 1} + 2]$$

$$\because a_k > 2, \therefore a_k - 1 > 1, \therefore a_k - 1 \neq \frac{1}{a_k - 1}, \therefore (a_k - 1) + \frac{1}{a_k - 1} > 2$$

$$\therefore a_{k+1} > \frac{1}{2}[2+2] = 2, \therefore n = k+1 \text{ 时, } a_{k+1} > 2, \text{ 命题也成立}$$

由①②对一切 $n \in N^*$ 有 $a_n > 2$ 5 分

(解法二)(反证法) 当 $a_n = 2$ 时解得 $a_{n-1} = 2, \therefore a_2 = 2, a_1 = 2$ 矛盾

$$\text{当 } a_n < 2 \text{ 时, } \frac{a_{n-1}^2}{2(a_{n-1} - 1)} < 2, \text{ 则 } \frac{(a_{n-1} - 2)^2}{2(a_{n-1} - 1)} < 0$$

$$\because a_{n-1} - 1 < 0 \text{ 则有 } a_{n-1} < 1, \text{ 那么有 } a_1 < 1 \text{ 矛盾}$$

$$\therefore a_n > 2 \text{ 5 分}$$

$$(2) \quad a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n(a_n - 2)}{2(a_n - 1)}$$

$$\because a_n > 2, \therefore a_{n+1} - a_n < 0, \therefore a_{n+1} < a_n \text{ 8 分}$$

$$(3) \quad \because a_{n+1} < a_n, \quad a_k \geq 3$$

$$\therefore a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_{k-1} > a_k \geq 3$$

$$\therefore \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k-1}}{2(a_{k-1} - 1)} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{a_{k-1} - 1} \right] < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3-1} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\text{即 } \frac{a_k}{a_{k-1}} < \frac{3}{4}$$

$$\therefore a_k = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_k}{a_{k-1}} < a_1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{3}{4} = a \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1}$$

$$\therefore 3 \leq a_k < a \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1}, \therefore a \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1} > 3, \because a > 3, \therefore \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1} > \frac{3}{a}$$

$$\therefore (k-1) \ln \frac{3}{4} > \ln \frac{3}{a}, \text{ 又 } \ln \frac{3}{4} < 0$$

$$\therefore k < \frac{\ln \frac{3}{a}}{\ln \frac{3}{4}} + 1 \text{ 13 分}$$